

Soal TKA Matematika (Pilihan) SMA/MA/SMK Tahun 2025

Hierarki Indikator

Elemen: Aljabar

Subelemen: Matriks

Kompetensi: Kemampuan memahami, mengaplikasikan, dan bernalar yang lebih tinggi untuk menyelesaikan permasalahan terkait invers matriks

Indikator: Menentukan invers matriks berordo 2×2 (1)

25MATALJMTXM26SL-000000-2629

Bentuk Soal : Pilihan Ganda

Perhatikan matriks berikut!

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Invers dari matrik F adalah

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Jawaban No 1

Diketahui

Dari gambar, matriks:

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ditanyakan **invers dari matriks F** .

Langkah 1: Gunakan rumus invers matriks 2×2

Untuk matriks

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

inversnya adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Langkah 2: Tentukan determinan F

$$\begin{aligned} \det(F) &= (2) \left(\frac{1}{2} \right) - (0)(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Karena determinannya 1, maka matriks F mempunyai invers.

Langkah 3: Tentukan inversnya

$$F^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Jadi,

$$\boxed{F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Pemeriksaan

$$\begin{aligned} F \cdot F^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hasilnya adalah matriks identitas, sehingga jawabannya benar.

✓ **Jawaban akhir**

Pilihan E

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Jadi, invers matriks F adalah pilihan E.

Hierarki Indikator

Elemen: Aljabar

Subelemen: Matriks

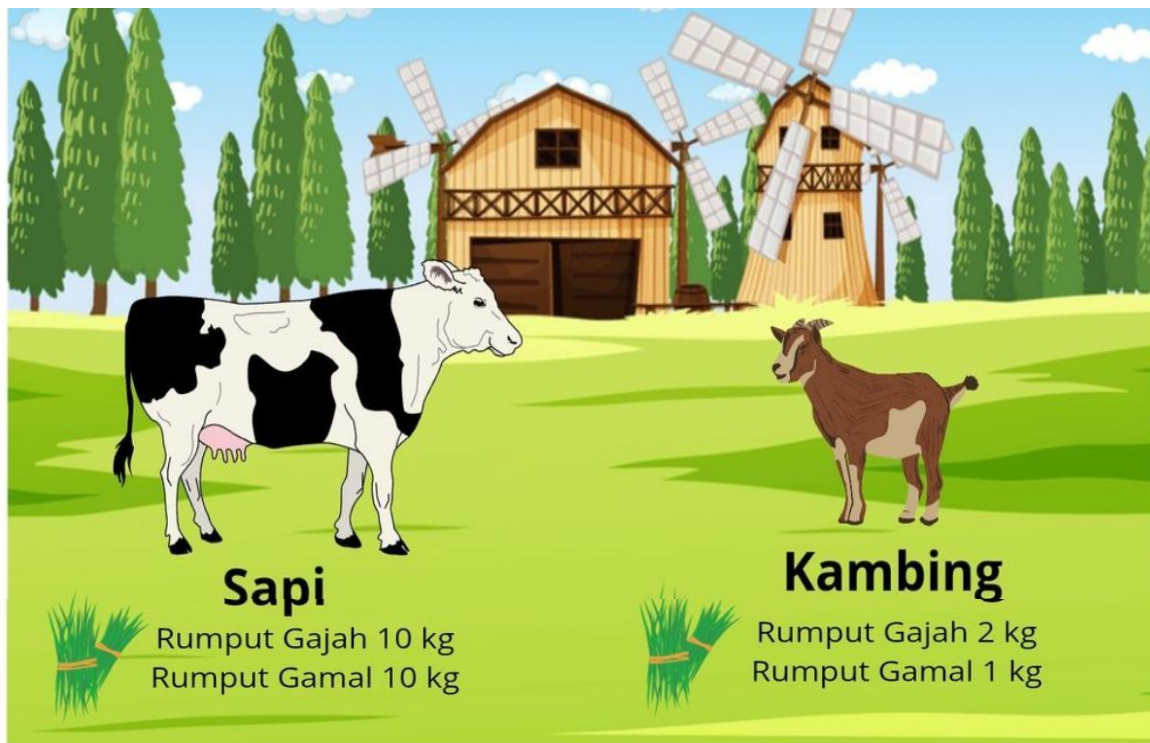
Kompetensi: Kemampuan memahami, mengaplikasikan, dan bernalar yang lebih tinggi untuk menyelesaikan permasalahan terkait invers matriks

Indikator: Menentukan solusi dari persamaan linear dua variabel menggunakan konsep invers matriks (3)

25MATALJMTXM26SL-000000-0694

Bentuk Soal : Pilihan Ganda

Pak Andi memiliki beberapa sapi dan kambing. Semua hewan ternaknya selalu diberikan pakan berupa campuran rumput gajah dan rumput gamal. Setiap hari, dia selalu menyediakan 38 kg rumput gajah dan 34 kg rumput gamal untuk seluruh kambing dan sapi miliknya (tanpa sisa). Berikut adalah kebutuhan pakan untuk setiap ekor ternak milik Pak Andi per hari.



Jika banyaknya sapi dan kambing yang dipelihara oleh Pak Andi berturut-turut adalah x dan y , maka

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dots$$

☐ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 10 & -10 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 38 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{10} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 34 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 10 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 38 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Jawaban No 2

Berdasarkan gambar, diketahui:

- Setiap **sapi** membutuhkan:
 - Rumput gajah = **10 kg**
 - Rumput gamal = **10 kg**
- Setiap **kambing** membutuhkan:
 - Rumput gajah = **2 kg**
 - Rumput gamal = **1 kg**
- Persediaan pakan setiap hari:
 - Rumput gajah = **38 kg**
 - Rumput gamal = **34 kg**

Misalkan:

- x = banyak sapi
- y = banyak kambing

1. Membentuk sistem persamaan

Untuk rumput gajah:

$$10x + 2y = 38$$

Untuk rumput gamal:

$$10x + y = 34$$

Sehingga bentuk matriksnya:

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 34 \end{pmatrix}$$

2. Mencari invers matriks

Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinan A:

$$\begin{aligned} \det(A) &= (10)(1) - (2)(10) \\ &= 10 - 20 = -10 \end{aligned}$$

Rumus invers matriks 2×2 :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Maka:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -10 & 10 \end{pmatrix} \\ A^{-1} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Menentukan x dan y

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A^{-1} \begin{pmatrix} 38 \\ 34 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 38 \\ 34 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Untuk x :

$$x = -\frac{1}{10}(38) + \frac{1}{5}(34)$$

$$x = -3,8 + 6,8 = 3$$

Untuk y :

$$y = (1)(38) + (-1)(34)$$

$$y = 38 - 34 = 4$$

Jadi:

$$\boxed{x = 3, y = 4}$$

Artinya Pak Andi memelihara **3 ekor sapi dan 4 ekor kambing**.

✓ **Jawaban yang benar**

Pilihan **C (kanan atas)**:

$$\boxed{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 10 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 38 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

Catatan: bentuk matriks pada pilihan tersebut secara langsung menghasilkan $(3, 4)^T$, tetapi jika yang dimaksud adalah **matriks invers** dari koefisien $\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$, maka invers yang tepat adalah

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

dan hasil akhirnya tetap $\boxed{(3, 4)^T}$.

Hierarki Indikator

Elemen: Aljabar

Subelemen: Matriks

Kompetensi: Kemampuan memahami, mengaplikasikan, dan bernalar yang lebih tinggi untuk menyelesaikan permasalahan terkait invers matriks

Indikator: Menganalisis hasil operasi perkalian dua matriks (4)

25MATALJMTXM27SL-000000-2607

Bentuk Soal : Pilihan Ganda

Sebuah pabrik minuman tradisional memproduksi tiga jenis minuman yaitu wedang jahe (WJ), beras kencur (BK), dan kunir asem (KA).

Dalam proses produksinya, digunakan tiga bahan utama yaitu jahe (J) dalam gram, gula merah (GM) dalam gram, dan air (A) dalam mililiter.

Setiap botol minuman memerlukan bahan sebagai berikut:

$$\begin{matrix} & J & GM & A \\ \begin{bmatrix} 20 & 15 & 50 \\ 10 & 25 & 40 \\ 12 & 8 & k \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Pada suatu hari pabrik tersebut menerima pesanan sebagai berikut:

$$\begin{matrix} WJ \\ BK \\ KA \end{matrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 80 \end{bmatrix}$$

Jumlah bahan baku yang digunakan dalam proses pembuatan setiap minuman adalah:

$$\begin{matrix} J \\ GM \\ A \end{matrix} \begin{bmatrix} 4360 \\ 4960 \\ 13000 \end{bmatrix}$$

Banyak air yang dibutuhkan untuk memproduksi satu botol kunir asem adalah

☐ 30 ml

☐ 35 ml

☐ 40 ml

☐ 45 ml

☐ 50 ml

Jawaban No 3

1. Informasi dari soal

Matriks kebutuhan bahan untuk setiap jenis minuman adalah

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 50 \\ 10 & 25 & 40 \\ 12 & 8 & k \end{pmatrix}$$

dengan baris berturut-turut:

- WJ = wedang jahe
- BK = beras kencur
- KA = kunyit asam

Kolom berturut-turut:

- J = jahe
- GM = gula merah
- A = air

Jumlah pesanan:

$$B = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Sedangkan jumlah bahan yang digunakan:

$$AB = \begin{pmatrix} 4360 \\ 4960 \\ 13000 \end{pmatrix}$$

Yang ditanyakan adalah **banyak air yang dibutuhkan untuk memproduksi satu botol kunyit asam**, yaitu nilai k .

2. Gunakan baris air (kolom A)

Untuk kebutuhan **air**, kita gunakan kolom ketiga dari matriks:

$$\begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ k \end{pmatrix}$$

Kemudian dikalikan dengan jumlah pesanan:

$$50(100) + 40(120) + k(80) = 13000$$

Hitung:

$$\begin{aligned} 5000 + 4800 + 80k &= 13000 \\ 9800 + 80k &= 13000 \\ 80k &= 13000 - 9800 \\ 80k &= 3200 \end{aligned}$$

$$k = \frac{3200}{80}$$

$$\boxed{k = 40}$$

Jadi, kebutuhan air untuk **satu botol kunyit asam** adalah:

$$\boxed{40 \text{ ml}}$$

✓ **Jawaban: C. 40 ml**

Kesimpulan: Setiap satu botol kunyit asam membutuhkan **40 ml air**.

Catatan: Dari gambar, total untuk bahan jahe dan gula merah tampak tidak konsisten dengan perkalian matriks yang ditampilkan. Namun, untuk menentukan k , data pada kolom air memberikan hasil yang tepat dan sesuai dengan pilihan jawaban, yaitu **40 ml**.

Hierarki Indikator

Elemen: Aljabar

Subelemen: Matriks

Kompetensi: Kemampuan memahami, mengaplikasikan, dan bernalar yang lebih tinggi untuk menyelesaikan permasalahan terkait operasi aljabar pada matriks

Indikator: Menginterpretasi solusi permasalahan kontekstual yang dihasilkan menggunakan operasi matriks (2)

25MATALJMTXM27SL-000000-0718

Bentuk Soal : Pilihan Ganda Kompleks - MCMA

Seorang pemilik Hotel mengelola 3 hotel yang berada pada kota yang berbeda. Hotel tersebut memiliki konsep dan tipe kamar yang sama yaitu Standard Room, Deluxe Room, dan Suite Room, dengan kapasitas dan harga per malam sebagai berikut.



TIPE KAMAR	HOTEL A	HOTEL B	HOTEL C	Harga (per malam)
Standard Room	9	6	7	Rp 150.000
Deluxe Room	6	7	5	Rp 500.000
Suite Room	3	2	4	Rp 1.000.000

Pemilik hotel akan melakukan perhitungan pendapatan yang diperoleh dari ketiga hotel tersebut. Bagaimana kondisi pendapatan ketiga hotel tersebut dalam 1 hari jika semua tipe kamar terisi penuh?

Pilih pada semua jawaban benar! Jawaban benar lebih dari satu.

- ☐ Pendapatan Hotel A dan Hotel C sama besar.
- ☐ Pendapatan Hotel B lebih besar daripada Hotel A.
- ☐ Pendapatan paling besar diperoleh dari Hotel C.
- ☐ Masing-masing hotel memiliki selisih pendapatan yang sama besar.
- ☐ Pendapatan yang diperoleh dari ketiga hotel tersebut lebih dari Rp20.000.000.

Jawaban No 4

1. Susun matriks jumlah kamar

Dari tabel:

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Baris menunjukkan:

- Baris 1 = Standard Room
- Baris 2 = Deluxe Room
- Baris 3 = Suite Room

Kolom menunjukkan:

- Kolom 1 = Hotel A
- Kolom 2 = Hotel B
- Kolom 3 = Hotel C

Harga tiap tipe kamar:

$$P = \begin{pmatrix} 150.000 \\ 500.000 \\ 1.000.000 \end{pmatrix}$$

Pendapatan masing-masing hotel diperoleh dari:

$$M^T P$$

Sehingga:

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 7 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 150.000 \\ 500.000 \\ 1.000.000 \end{pmatrix}$$

2. Hitung pendapatan tiap hotel

Hotel A:

$$\begin{aligned} & (9)(150.000) + (6)(500.000) + (3)(1.000.000) \\ & = 1.350.000 + 3.000.000 + 3.000.000 = \boxed{Rp7.350.000} \end{aligned}$$

Hotel B:

$$\begin{aligned} & (6)(150.000) + (7)(500.000) + (2)(1.000.000) \\ & = 900.000 + 3.500.000 + 2.000.000 = \boxed{Rp6.400.000} \end{aligned}$$

Hotel C:

$$(7)(150.000) + (5)(500.000) + (4)(1.000.000) \\ = 1.050.000 + 2.500.000 + 4.000.000 = \boxed{Rp7.550.000}$$

Jadi:

Hotel Pendapatan

A Rp7.350.000

B Rp6.400.000

C Rp7.550.000

3. Periksa setiap pernyataan

1. **Pendapatan Hotel A dan Hotel C sama besar. ✗**
Rp7.350.000 $\neq$ Rp7.550.000
2. **Pendapatan Hotel B lebih besar daripada Hotel A. ✗**
Rp6.400.000 < Rp7.350.000
3. **Pendapatan paling besar diperoleh dari Hotel C. ✓**
Hotel C memperoleh Rp7.550.000, paling besar.
4. **Masing-masing hotel memiliki selisih pendapatan yang sama besar. ✗**
Selisih A dan B = Rp950.000, sedangkan C dan A = Rp200.000.
5. **Pendapatan yang diperoleh dari ketiga hotel tersebut lebih dari Rp20.000.000. ✓**

$$7.350.000 + 6.400.000 + 7.550.000 = \boxed{Rp21.300.000}$$

Rp21.300.000 > Rp20.000.000.

✓ Jawaban yang benar:

Pernyataan nomor 3 dan 5.

PEMBAHASAN SOAL TKA MATEMATIKA TINGKAT LANJUT

5. Di manakah koordinat titik perpotongan grafik fungsi

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24 \text{ terhadap sumbu } X?$$

Pilih pada semua jawaban benar! Jawaban benar lebih dari satu.

☐ $(-2, 0)$

☐ $(-1, 0)$

☐ $(3, 0)$

☐ $(4, 0)$

☐ $(5, 0)$

Pembahasan:

Titik potong grafik dengan sumbu X diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$.

Dengan Teorema Faktor, dicoba beberapa faktor dari 24.

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 + 3(-2)^2 - 10(-2) - 24 \\ &= -8 + 12 + 20 - 24 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jadi, $(x + 2)$ merupakan faktor. Selanjutnya dilakukan pembagian sintetis sehingga diperoleh: $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = (x + 2)(x^2 + x - 12)$.

Faktorkan bentuk kuadratnya: $x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3)$.

Maka, $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = (x + 2)(x + 4)(x - 3)$.

Akar-akar persamaan adalah $x = -4, -2$, dan 3 .

Titik potong dengan sumbu X adalah $(-2, 0)$, dan $(3, 0)$.

Jadi, **jawaban yang benar adalah A , dan C.**

6. Diketahui suku banyak $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + x - 6$ apabila dibagi oleh $x^2 + x + 1$ menghasilkan sisa $5x - 1$. Nilai dari $a + b = \dots$
- A. 11
 - B. 5
 - C. -1
 - D. -5
 - E. -7

Pembahasan:

Karena

$$f(x) \equiv 5x - 1 \pmod{x^2 + x + 1},$$

maka setiap pangkat x dapat direduksi menggunakan

$$\begin{aligned}x^2 + x + 1 &= 0 \\x^2 &= -x - 1.\end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}x^3 &= x(x^2) \\&= x(-x - 1) \\&= -x^2 - x \\&= x + 1 - x \\&= 1,\end{aligned}$$

Dan

$$\begin{aligned}x^4 &= x \cdot x^3 \\&= x.\end{aligned}$$

Substitusikan ke dalam $f(x)$.

$$\begin{aligned}f(x) &\equiv x + a + b(-x - 1) + x - 6 \\&= (2 - b)x + (a - b - 6).\end{aligned}$$

Karena sisanya adalah

$5x - 1$, maka koefisien yang bersesuaian harus sama.

$$\begin{aligned}2 - b &= 5, \\a - b - 6 &= -1.\end{aligned}$$

Dari persamaan pertama, $b = -3$.

Kemudian,

$$a - (-3) - 6 = -1$$

$$a - 3 = -1$$

$$a = 2.$$

Jadi, $a + b = 2 + (-3) = -1$.

Dengan demikian $\boxed{a + b = -1}$

Sehingga jawaban yang benar adalah C.

7. Sebuah drum bahan bakar logam mengalami penambahan kapasitas volume saat terkena panas, yang dapat dinyatakan dalam fungsi berikut:

$$V(T) = 0,05 T^3 + 0,4 T^2 + 20 T$$

Dengan T adalah suhu dalam derajat celsius dan $V(T)$ Adalah penambahan volume dalam liter. Apabila terdapat 10 drum dengan jenis dan ukuran yang sama, total penambahan volume dari drum-drum tersebut ketika terkena panas dengan suhu yang sama dapat dinyatakan dengan....

- $50 T^3 + 40 T^2 + 200 T$
- $50 T^3 + 4 T^2 + 200 T$
- $5 T^3 + 4 T^2 + 200 T$
- $0,5 T^3 + 4 T^2 + 200 T$
- $0,5 T^3 + 0,4 T^2 + 200 T$

Pembahasan:

Penambahan volume untuk satu drum diberikan oleh

$$V(T) = 0,05T^3 + 0,4T^2 + 20T.$$

Karena terdapat **10 drum** dengan ukuran yang sama, maka total penambahan volumenya adalah

$$\begin{aligned} 10V(T) &= 10(0,05 T^3 + 0,4 T^2 + 20 T) \\ &= 10(0,05 T^3) + 10(0,4 T^2) + 10(20 T) \\ &= 0,5 T^3 + 4 T^2 + 200 T. \end{aligned}$$

Jadi, total penambahan volume dari 10 drum adalah $0,5 T^3 + 4 T^2 + 200 T$

sehingga **jawaban yang benar adalah D.**

8. Sebuah perusahaan menawarkan saham kepada pembeli. Perusahaan menyiapkan modal saham yang akan dijual dan dapat dinyatakan sebagai fungsi $f(x) = x^3 - 70x^2 - 2600x + 74.000$ dimana nilai $f(x)$ dalam jutaan rupiah dan

X menyatakan banyak saham dalam satuan unit saham.

Apabila modal saham yang dimiliki perusahaan tersebut adalah 2 milyar (2.000 juta), tentukan Mungkin atau Tidak Mungkin perusahaan dapat menjual sejumlah unit saham berikut!

Banyak Unit Saham	Mungkin	Tidak Mungkin
30 unit	☐	☐
40 unit	☐	☐
60 unit	☐	☐

Modal yang dimiliki perusahaan adalah 2 miliar atau 2.000 juta rupiah. Karena $f(x)$ menyatakan modal dalam jutaan rupiah, maka suatu banyak unit saham dikatakan mungkin jika nilai $f(x)$ tidak melebihi 2.000.

Periksa setiap nilai x .

$$\begin{aligned}f(30) &= 30^3 - 70(30)^2 - 600(30) + 74.000 \\&= 27.000 - 63.000 - 18.000 + 74.000 \\&= 20.000.\end{aligned}$$

Karena $20.000 > 2.000$, maka 30 unit **Tidak Mungkin**.

$$\begin{aligned}f(40) &= 40^3 - 70(40)^2 - 600(40) + 74.000 \\&= 64.000 - 112.000 - 24.000 + 74.000 \\&= 2.000.\end{aligned}$$

Karena $2.000 = 2.000$, maka 40 unit **Mungkin**.

$$\begin{aligned}f(60) &= 60^3 - 70(60)^2 - 600(60) + 74.000 \\&= 216.000 - 252.000 - 36.000 + 74.000 \\&= 2.000.\end{aligned}$$

Karena $2.000 = 2.000$, maka 60 unit **Mungkin**.

Jawaban benar:

30 unit: **Tidak Mungkin**.

40 unit: **Mungkin**.

60 unit: **Mungkin**.

Nama Anggota Kelompok:

1. Dian Masyithah
2. Ulfa Mutia
3. Musriani
4. Laila
5. Yunita
6. Sriwahyuni
7. Fitri Riya Yanti
8. Nurmalawati
9. Fathaniah
10. Aulia Maqshun
11. Ratnawati
12. Tihajar

9. Populasi kelinci di suatu pulau dimodelkan dengan fungsi eksponensial, yaitu: $K(t) = 4 \cdot 2^{\frac{t}{4}}$ dengan t menyatakan waktu dalam satuan tahun dan $K(t)$ menyatakan populasi dalam ribu ekor.

Pernyataan	Benar	Salah
Setiap 4 tahun populasi bertambah menjadi 4 kalinya.	☐	☐
Pada saat awal populasi kelinci berjumlah 4 ribu ekor.	☐	☐
Populasi mencapai 1 juta sebelum 20 tahun dari awal pengamatan.	☐	☐

Penyelesaian:

Diketahui model pertumbuhan populasi kelinci: $K(t) = 4 \cdot 2^{\frac{t}{4}}$

dengan

t = waktu dalam tahun

$K(t)$ = populasi kelinci dalam ribu ekor

Untuk pernyataan 1

“Setiap 4 tahun populasi bertambah menjadi 4 kalinya”

$$K(t) = 4 \cdot 2^{\frac{t}{4}}$$

jika waktu bertambah 4 tahun berarti $t + 4$:

$$K(t) = 4 \cdot 2^{\frac{t}{4}}$$

$$K(t + 4) = 4 \cdot 2^{\frac{t+4}{4}}$$

$$K = 4 \cdot 2^{\frac{t}{4+1}}$$

karena:

$$2^{\frac{t}{4+1}} = 2^{\frac{t}{4}} \cdot 2$$

maka populasi menjadi 2 kali lipat, PERNYATAAN 1 SALAH

Untuk pernyataan 2

“Pada saat awal populasi kelinci berjumlah 4 ribu ekor”

Pada awal pengamatan:

$$t = 0$$

substitusi ke fungsi:

$$K(0) = 4 \cdot 2^{\frac{0}{4}}$$

$$K(0) = 4 \cdot 2^0$$

$$\text{karena } 2^0 = 1,$$

$$\text{maka } K(0) = 4 \cdot 1$$

$$K(0) = 4$$

sehingga $K(t)$ dalam ribu ekor, maka:

$$4 = 4000 \text{ ekor}$$

Jadi, PERNYATAAN 2 BENAR

Untuk pernyataan 3

“Populasi mencapai 1 juta sebelum 20 tahun dari awal pengamatan”

karena $K(t)$ dalam ribu ekor:

$$1.000.000 \text{ ekor} = 1.000 \text{ ribu ekor}$$

kalau di lihat setelah 10 tahun:

$$K(10) = 4 \cdot 2^{\frac{10}{4}}$$

$$K(10) = 4 \cdot 2^{2,5}$$

$$\text{Nilai } 2^{2,5} \approx 5,657$$

Maka,

$$K(10) = 4 \cdot (5,657)$$

$$K(10) \approx 22,628$$

artinya

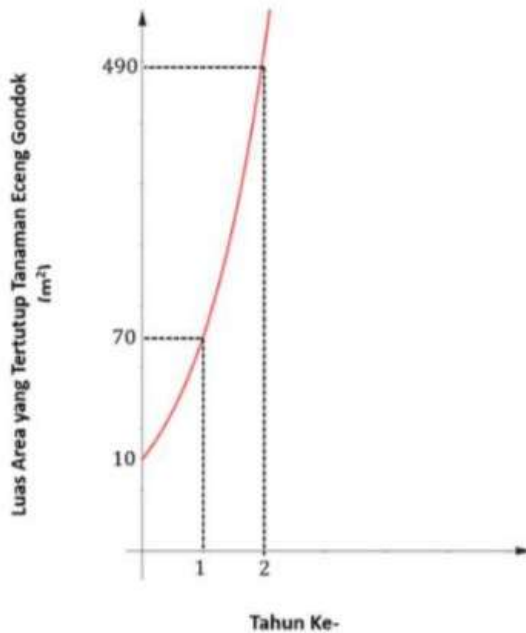
$K(10) \approx 22,628$ ribu ekor atau sekitar 22.628 ekor sedangkan 1 juta ekor adalah:
1.000.000 ekor

jadi setelah 10 tahun, populasi masih jauh di bawah 1 juta ekor

PERNYATAAN 3 SALAH

10.

Seorang peneliti lingkungan melakukan pengamatan terhadap pertumbuhan tanaman eceng gondok di beberapa danau sekitar wilayah X. Pengamatan dilakukan selama 3 tahun dan hasil menunjukkan bahwa pertumbuhan eceng gondok dapat dimodelkan dengan fungsi berikut:



Tanaman Eceng Gondok

Setelah 3 tahun pengamatan, peneliti mencatat banyak tanaman eceng gondok di beberapa wilayah perairan tersebut. Berikut data yang diperoleh:

Wilayah Perairan	Luas Area yang Tertutupi Tanaman Eceng Gondok (m ²)
Danau A	15.000
Danau B	16.500
Danau C	17.000
Danau D	17.500
Danau E	18.000

Berdasarkan data tersebut, wilayah perairan manakah dengan luas area yang tertutupi tanaman eceng gondok **lebih dari 49 m²** pada awal pengamatan dilakukan?

Pilihlah setiap jawaban benar! Jawaban benar lebih dari satu.

☐ Danau A

☐ Danau B

☐ Danau C

☐ Danau D

☐ Danau E

Penyelesaian:

Dari grafik di peroleh:

Tahun ke-0=10

Tahun ke-1=70

Tahun ke-2=490

Perbandingan tiap tahun

$$\frac{70}{10} = 7$$

$$\frac{490}{70} = 7$$

jadi Model pertumbuhan

$$f(x) = 10 (7)^x$$

Setelah 3 tahun

$$f(3) = 10 (7)^3$$

$$= 10 (343)$$

$$= 3430\text{m}^2$$

Data luas wilayah

Danau A = 15.000 m²

Danau B = 16.500m²

Danau C = 17.000 m²

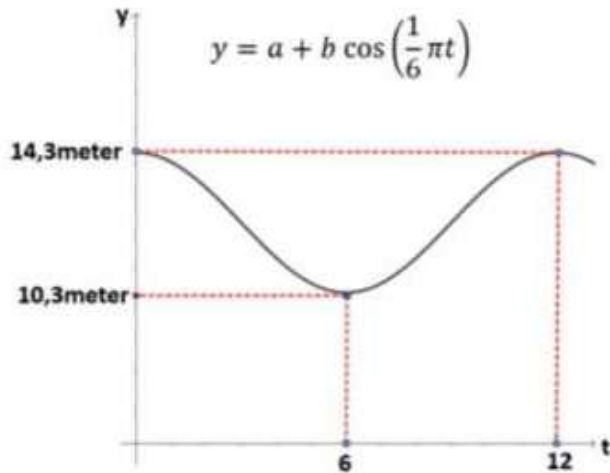
Danau D = 17.500 m²

Danau E = 18.000 m²

Yang ditanya wilayah yang luasnya lebih dari 49 m² jadi semua nilai tersebut jelas luasnya lebih dari 49 m². maka Jawaban nya

✓ Danau A, B, C, D dan E

11. Grafik berikut menyatakan perubahan kedalaman air laut di sebuah teluk.



Pada grafik tersebut, y menyatakan kedalaman air laut dalam meter, t dalam jam, serta a dan b adalah konstanta. Berkenaan dengan nilai t pada grafik, nilai $t = 6$ menyatakan 6 jam setelah pukul 00.00, aturan serupa untuk nilai t lainnya.

Waktu saat kedalaman air laut mencapai 12,3 meter untuk ketiga kalinya setelah pukul 00.00 adalah

- ☐ 3 jam
- ☐ 9 jam
- ☐ 10 jam
- ☐ 12 jam
- ☐ 15 jam

Penyelesaian:

Diketahui : $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

Dari grafik :

- kedalaman maksimum = 14,3 m
- kedalaman minimum = 10,3 m

Nilai tengah :

$$a = \frac{14,3 + 10,3}{2} = 12,3$$

Ampitudo:

$$b = \frac{14,3 - 10,3}{2} = 2$$

$$\text{Jadi : } y = 12,3 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Ditanyakan kapan kedalaman 12,3 m untuk ketiga kalinya setelah pukul 00.00

$$12,3 = 12,3 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 0$$

cosinus bernilai 0 saat :

$$\frac{\pi}{6}t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

$$\text{sehingga } t = 3, 9, 15, \dots$$

kemunculan ketiga adalah

$$t = 15 \text{ jam}$$

jadi waktunya pukul 15:00

12.

Diketahui vektor $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2m \\ m+3 \\ m \end{pmatrix}$

Jika nilai vektor $\vec{AB} = 9$ satuan panjang, maka nilai m yang memenuhi vektor $\vec{AB}$ adalah ...

☐ -4 atau -3

☐ -4 atau 3

☐ -3 atau 4

☐ 3 atau 4

Penyelesaian:

$$\text{diket : } \overrightarrow{AB} = m + 3, \overrightarrow{AB} = 9$$

$$9 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$9^2 = (2m)^2 + (m + 3)^2 + m^2$$

$$81 = 4m^2 + m^2 + 6m + 9 + m^2$$

$$81 = 6m^2 + 6m + 9$$

$$= 6m^2 + 6m + 9 - 81$$

$$= \frac{6m^2 + 6m - 72}{6}$$

$$= m^2 + m - 12$$

$$= (m + 4)(m - 3)$$

$$m + 4 = 0$$

$$m - 3 = 0$$

$$m = -4$$

$$m = 3$$

13.

Diketahui trapesium sama kaki $ABCD$ dengan $AD = BC$ dan titik $A(0,0)$.

Vektor-vektor posisi dari pembentuk trapesium adalah $\vec{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\vec{BC} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ Nilai dari

$$a^2 + 2b = \dots$$

☐ 5

☐ 7

☐ 9

☐ 10

☐ 13

Diketahui:

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{BC} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Karena $AB \parallel DC$, maka tinggi trapezium sama, sehingga: $b = 4$

Karena trapesium sama kaki, maka $AD = BC$:

$$1^2 + 4^2 = a^2 + b^2$$

$$17 = a^2 + 16$$

$$17 - 16 = a^2$$

$$a^2 = 1$$

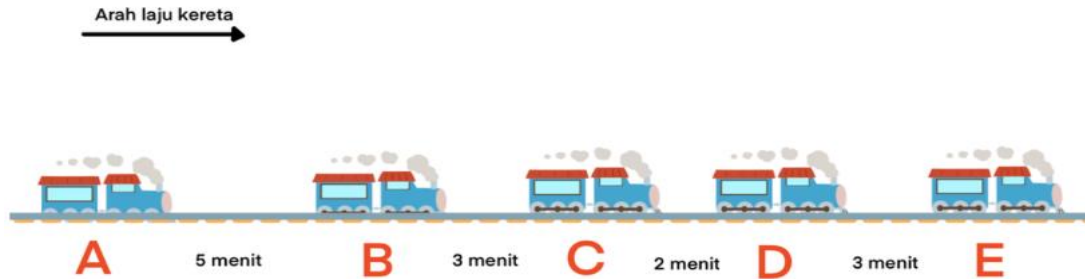
Maka:

$$a^2 + 2b = 1 + 2(4) = 9$$

Jawaban : 9

14. **SOAL NO.14 :**

Sebuah kereta api sedang melaju dengan kecepatan konstan pada sebuah lintasan lurus dari stasiun A sampai stasiun E. Diketahui koordinat stasiun A dan E (dalam km) berturut-turut adalah (2, 3, 5) dan (11, 6, 8). Perhatikan gambar berikut yang menggambarkan waktu tempuh (dalam menit) kereta tersebut antar stasiun:



Manakah stasiun-stasiun yang jaraknya kurang dari 3,5 km?
Pilih semua jawaban benar! Jawaban benar lebih dari satu.

☐ AB

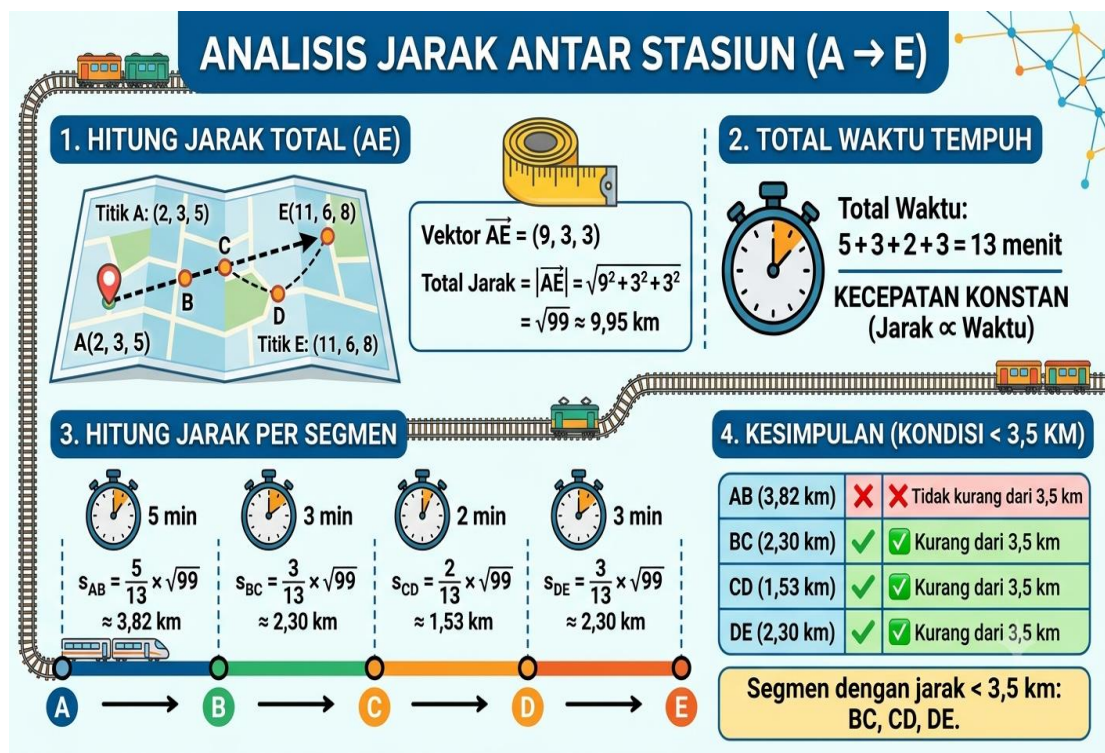
☐ BC

☐ CD

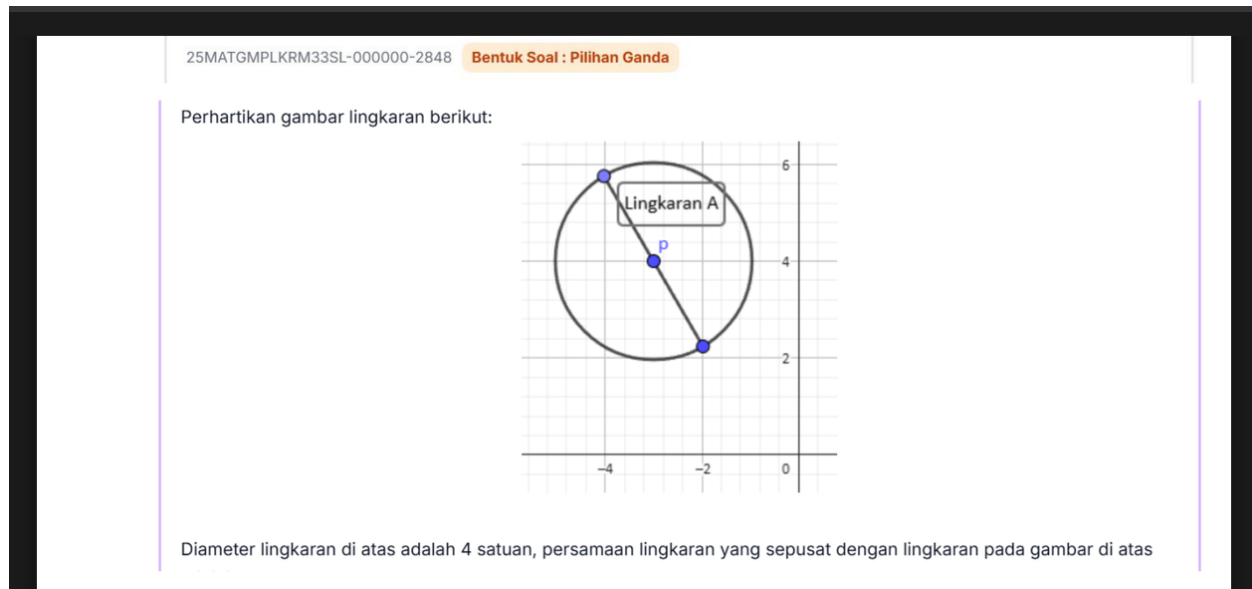
☐ DE

☐ CE

PENYELESAIAN :



15.



☐ $x^2 + 6x + y^2 - 8y + 16 = 0$

☐ $x^2 - 6x + y^2 - 8y + 21 = 0$

☐ $x^2 + 6x + y^2 + 8y + 16 = 0$

☐ $x^2 - 8x + y^2 - 6y + 16 = 0$

☐ $x^2 + 8x + y^2 - 6y + 21 = 0$

Dari gambar, diameter lingkaran adalah 4, sehingga:

$$r = \frac{4}{2} = 2$$

Titik ujung diameter adalah $(-4,6)$ dan $(-2,2)$.

Maka pusatnya:

$$P = \left(\frac{-4+(-2)}{2}, \frac{6+2}{2} \right) = (-3,4)$$

Persamaan lingkaran berpusat di $(-3,4)$:

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 2^2$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 4$$

$$x^2 + 6x + y^2 - 8y + 21 = 0$$

Jadi, jawabannya yang benar adalah:

$$x^2 + 6x + y^2 - 8y + 21 = 0$$

16. **SOAL NO.16 :**

Hierarki Indikator

Elemen: Geometri dan Pengukuran

Subelemen: Lingkaran

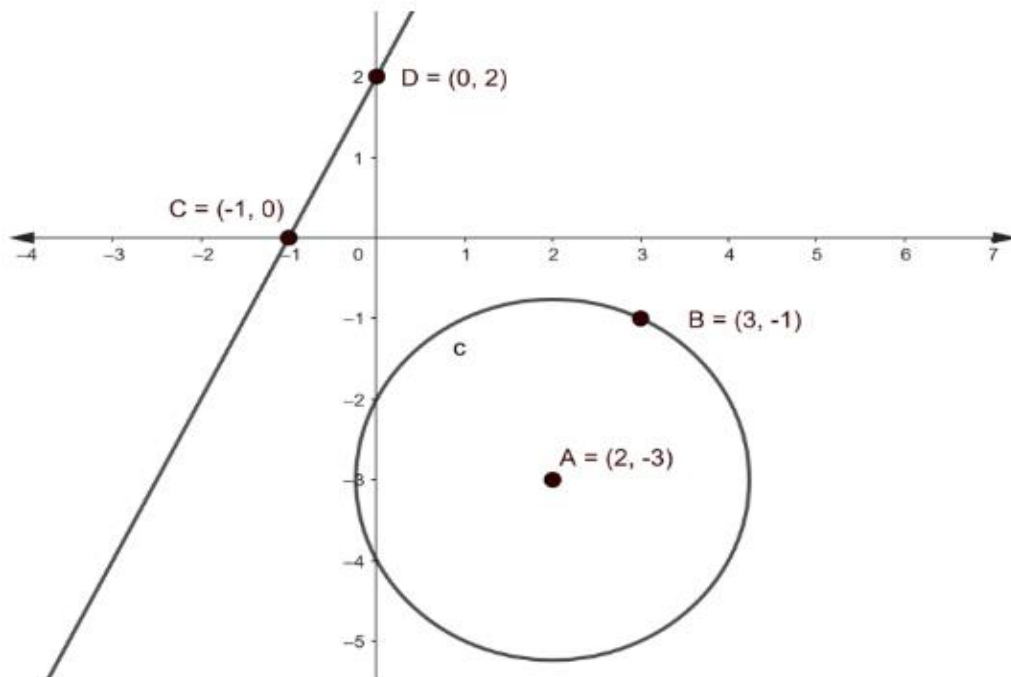
Kompetensi: Kemampuan memahami, mengaplikasikan, dan bernalar yang lebih tinggi untuk menyelesaikan permasalahan terkait persamaan lingkaran dan persamaan garis singgung lingkaran

Indikator: Menentukan koordinat titik singgung dari garis-garis singgung lingkaran yang tegak lurus terhadap suatu garis tertentu (16)

25MATGMPLKRM33SL-000000-2609

Bentuk Soal : Pilihan Ganda Kompleks - MCMA

Perhatikan gambar berikut!



Tentukan semua koordinat titik singgung lingkaran dari garis-garis singgung lingkaran yang tegak lurus terhadap garis f !

Klik pada setiap jawaban benar. Jawaban Benar lebih dari satu.

☐ (3, 1)

☐ (1, -5)

☐ (-1, 5)

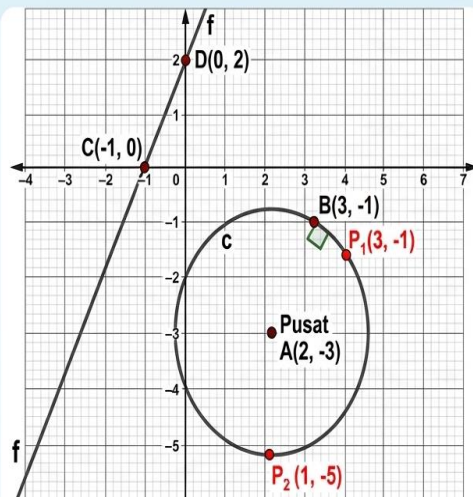
☐ (3, -1)

☐ (-3, -1)

PENYELESAIAN :

Elemen: Geometri dan Pengukuran | **Subelemen:** Lingkaran | **Indikator (16):** Menentukan koordinat titik singgung (tegak lurus garis f)

PEMBAHASAN SOAL: TITIK SINGGUNG LINGKARAN TEGAK LURUS



1. GRADIEN GARIS l (m_f)

Garis f melalui $C(-1, 0)$ & $D(0, 2)$

$$m_f = \frac{2 - 0}{0 - (-1)} = 2$$

2. GRADIEN GARIS SINGGUNG (m_s)

Syarat Tegak Lurus: $m_f \times m_s = -1$

$$2 \times m_s = -1 \Rightarrow m_s = -1/2$$

3. JARI-JARI LINGKARAN (r)

Lingkaran pusat $A(2, -3)$ melalui $B(3, -1)$

$$r = \sqrt{(3 - 2)^2 + (-1 - (-3))^2} = \sqrt{5}$$

4. VEKTOR SATUAN PERGESERAN (u)

Garis normal tegak lurus gradien $m_f = 2$.
Arah vektor perubahan (1, 2)

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}}, \frac{2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\Delta x = \pm \sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \pm 1$$

Poin Pertama (P_1): Poin Kedua (P_2):

$$\Delta x = \pm \sqrt{5} \times 3 \quad x_1 = 2 + 1 = 1$$

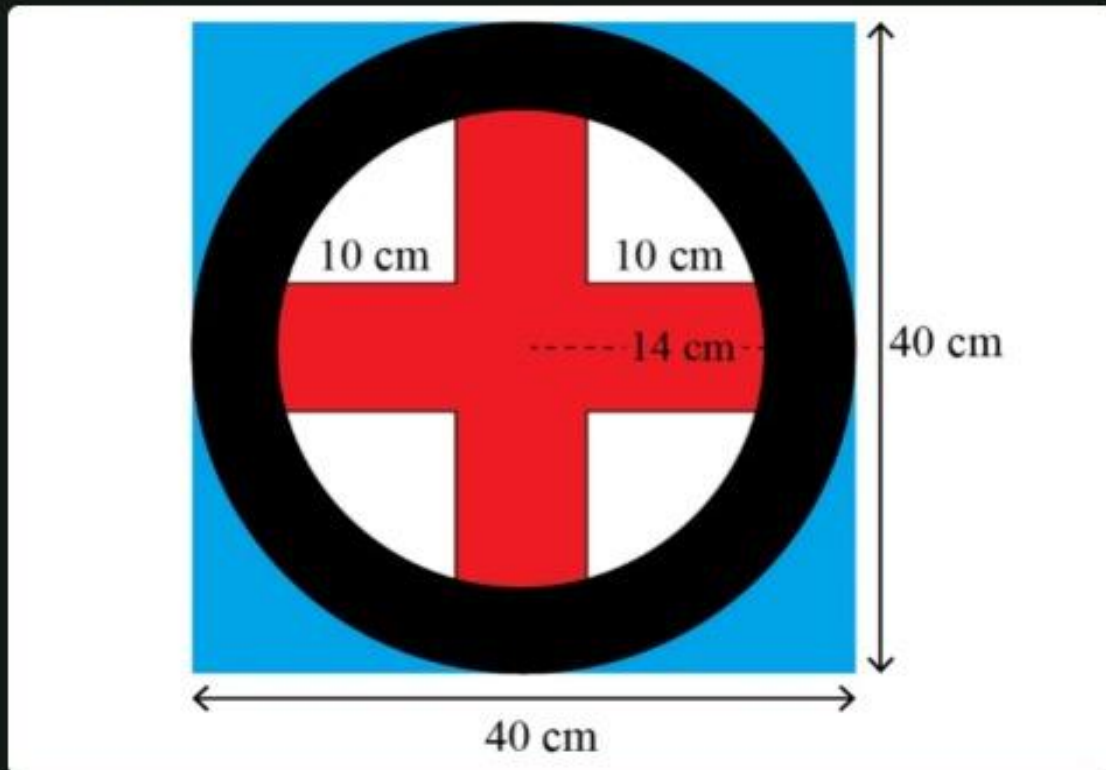
$$\Delta y = \pm \sqrt{5} \times (3, -1) \quad y_2 = -5 \Rightarrow (1, -5)$$

JAWABAN FINAL

Poin Pertama (P_1): (3, -1) ☒ (1, -5)
Poin Kedua (P_2): (1, -5) ☒ (3, -1)

SOAL 17

Suatu rumah makan terdapat gambar rambu lalu lintas. Gambarnya seperti gambar rambu lalu lintas balai pertolongan pertama, namun tidak sama persis.



Pemilik rumah makan ingin membuat rambu tersebut dalam jumlah banyak untuk cabang yang baru dan cat yang dibeli dalam ukuran yang sama. Cat warna apakah yang lebih banyak digunakan dibanding cat warna hitam?

Klik pada semua jawaban benar. Jawaban benar lebih dari satu.

☐ Setengah hitam dan biru.

☐ Setengah hitam dan merah.

☐ Setengah hitam dan putih.

☐ Biru dan putih.

☐ Biru dan merah.

Ukuran rambu berbentuk persegi dengan sisi **40** cm, sehingga luas persegi adalah

$$\begin{aligned}L_{\text{persegi}} &= 40 \times 40 \\ &= 1600 \text{ cm}^2.\end{aligned}$$

Lingkaran luar memiliki diameter **40** cm, sehingga jari-jarinya **20** cm. Luas lingkaran luar adalah

$$\begin{aligned}L_{\text{lingkaran luar}} &= \pi(20)^2 \\ &= 400\pi.\end{aligned}$$

Maka luas daerah biru adalah

$$L_{\text{biru}} = 1600 - 400\pi.$$

Lingkaran bagian dalam memiliki jari-jari **14** cm. Luas lingkaran bagian dalam adalah

$$\begin{aligned}L_{\text{lingkaran dalam}} &= \pi(14)^2 \\ &= 196\pi.\end{aligned}$$

Luas daerah hitam adalah selisih luas lingkaran luar dan lingkaran dalam.

$$\begin{aligned}L_{\text{hitam}} &= 400\pi - 196\pi \\ &= 204\pi.\end{aligned}$$

Dengan pendekatan $\pi \approx 3,14$, diperoleh

$$\begin{aligned}L_{\text{hitam}} &\approx 204(3,14) \\ &\approx 640,56 \text{ cm}^2.\end{aligned}$$

Sementara itu,

$$\begin{aligned}L_{\text{biru}} &= 1600 - 400(3,14) \\ &= 1600 - 1256 \\ &= 344 \text{ cm}^2.\end{aligned}$$

Berdasarkan ukuran pada gambar, daerah merah berbentuk tanda tambah. Lebar masing-masing lengan tanda tambah adalah

$$28 - 10 - 10 = 8 \text{ cm}.$$

Maka luas daerah merah dapat diperkirakan dengan menjumlahkan dua persegi panjang dan mengurangi bagian yang terhitung dua kali.

$$\begin{aligned}L_{\text{merah}} &= (28 \times 8) + (28 \times 8) - (8 \times 8) \\ &= 224 + 224 - 64 \\ &= 384 \text{ cm}^2.\end{aligned}$$

Setengah luas daerah hitam adalah

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}L_{\text{hitam}} &\approx \frac{1}{2}(640,56) \\ &\approx 320,28 \text{ cm}^2.\end{aligned}$$

Daerah biru dan merah memiliki luas lebih besar daripada setengah luas daerah hitam.

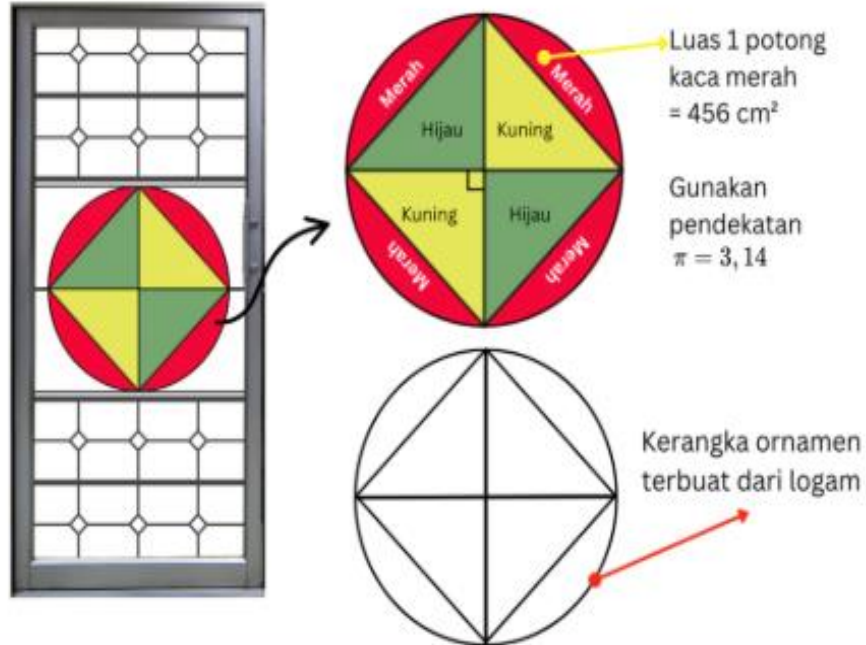
- Luas biru $\approx 344 \text{ cm}^2$.
- Luas merah $\approx 384 \text{ cm}^2$.
- Setengah luas hitam $\approx 320,28 \text{ cm}^2$.  Matematika

Jadi warna yang lebih banyak digunakan dibanding setengah cat warna hitam adalah **biru dan merah**. Maka jawaban yang benar adalah **E**.

SOAL 18

Pak Baskara akan membuat daun pintu dengan ornamen kaca patri berbentuk bulat di tengahnya.

Detail Ornamen Kaca Patri



Kerangka ornamen terbuat dari logam. Pak Baskara ingin memilih logam yang **pas**, yaitu cukup untuk membuat seluruh kerangka dengan sisa kurang dari 1 meter. Tentukan apakah setiap pilihan berikut **Pas** atau **Tidak Pas**.

Pilihan	Pas	Tidak Pas
Membeli 2 buah logam A	☐	☐
Membeli 1 buah logam B	☐	☐
Membeli 1 buah logam C	☐	☐

🔔 Pembahasan

Luas satu potong kaca merah merupakan luas segmen lingkaran.

$$\begin{aligned}\text{Luas segmen} &= \text{luas sektor} - \text{luas segitiga} \\ &= \frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2.\end{aligned}$$

Diketahui luas segmen = 456 cm^2 dan gunakan $\pi = 3,14$.

$$\begin{aligned}456 &= \frac{3,14 - 2}{4}r^2 \\ &= 0,285r^2.\end{aligned}$$

Sehingga

$$r^2 = \frac{456}{0,285} = 1600,$$

maka

$$r = 40 \text{ cm}.$$

Panjang logam yang dibutuhkan terdiri atas:

- Keliling lingkaran:

$$2\pi r = 2(3,14)(40) = 251,2 \text{ cm}.$$

- Dua diameter:

$$2 \times 80 = 160 \text{ cm}.$$

- Empat sisi belah ketupat di dalam lingkaran. Masing-masing panjangnya

$$40\sqrt{2} \approx 40(1,4) = 56 \text{ cm},$$

sehingga total

$$4 \times 56 = 224 \text{ cm}.$$

Jadi panjang logam seluruhnya

$$251,2 + 160 + 224 = 635,2 \text{ cm} = 6,352 \text{ m}.$$

Bandingkan dengan pilihan yang tersedia.

- 2 logam A = 8 m, sisa **1,648 m** $> 1 \text{ m} \rightarrow$ **Tidak Pas.**

- 1 logam B = 5 m, tidak cukup $\rightarrow$ **Tidak Pas.**

- 1 logam C = 6,5 m, sisa **0,148 m** $< 1 \text{ m} \rightarrow$ **Pas.**

SOAL 19

Apabila garis $ax + y - 9 = 0$ dan $x + by + 6 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = x$ kemudian dilanjutkan translasi

$$T\left(\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}\right),$$

menghasilkan bayangan dengan persamaan berturut-turut $x + 2y - 8 = 0$ dan $2x - y - 9 = 0$. Nilai dari

$$2a - b$$

adalah

A -6

B -2

C 0

D 2

E 6

🔥 Pembahasan

Pencerminan terhadap garis $y = x$ menukar posisi variabel x dan y . Untuk garis pertama,

$$ax + y - 9 = 0$$

setelah dicerminkan terhadap garis $y = x$ menjadi

$$x + ay - 9 = 0.$$

Selanjutnya dilakukan translasi

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pada persamaan bayangan, substitusi yang digunakan adalah

$$x \rightarrow x - 1, \quad y \rightarrow y + 1.$$

Maka

$$\begin{aligned} (x - 1) + a(y + 1) - 9 &= 0 \\ x - 1 + ay + a - 9 &= 0 \\ x + ay + a - 10 &= 0. \end{aligned}$$

Karena bayangannya adalah

$$x + 2y - 8 = 0,$$

maka

$$a = 2.$$

Untuk garis kedua,

$$x + by + 6 = 0$$

setelah dicerminkan terhadap garis $y = x$ menjadi

$$bx + y + 6 = 0.$$

Setelah translasi,

$$\begin{aligned} b(x - 1) + (y + 1) + 6 &= 0 \\ bx - b + y + 1 + 6 &= 0 \\ bx + y + 7 - b &= 0. \end{aligned}$$

Bayangannya adalah

$$2x - y - 9 = 0.$$

Agar bentuknya dapat dibandingkan dengan $bx + y + 7 - b = 0$, kalikan persamaan tersebut dengan -1 .

$$-2x + y + 9 = 0.$$

Maka diperoleh

$$b = -2.$$

Jadi,

$$\begin{aligned} 2a - b &= 2(2) - (-2) \\ &= 4 + 2 \\ &= 6. \end{aligned}$$

Jadi,

$$\boxed{2a - b = 6}$$

sehingga jawaban yang benar adalah E.

SOAL 20

Lingkaran L memiliki pusat di $(-5, 3)$ dan jari-jari 2. Lingkaran L' adalah bayangan dari L setelah dilakukan translasi T . Lingkaran dengan persamaan

$$(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$$

adalah bayangan dari L' setelah dilakukan dilatasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan faktor skala tertentu.

Pernyataan yang benar mengenai translasi T dan faktor skala dilatasi yang dilakukan adalah

A $T = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan skala dilatasi 8

B $T = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan skala dilatasi 4

C $T = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan skala dilatasi 2

D $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan skala dilatasi 2

E $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan skala dilatasi 8

💡 Pembahasan

Lingkaran akhir memiliki persamaan

$$(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 16.$$

Dari persamaan tersebut, pusat lingkaran akhir adalah $(-4, 4)$ dan jari-jarinya 4 . Lingkaran awal memiliki jari-jari 2 . Karena dilatasi mengubah jari-jari menjadi 4 , maka faktor skala dilatasi adalah

$$\begin{aligned} k &= \frac{4}{2} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Misalkan pusat lingkaran L' sebelum dilatasi adalah (p, q) . Karena dilatasi berpusat di $O(0, 0)$ dengan skala 2 , maka

$$\begin{aligned} 2(p, q) &= (-4, 4) \\ (p, q) &= (-2, 2). \end{aligned}$$

Jadi pusat lingkaran L' adalah $(-2, 2)$. Pusat lingkaran L adalah $(-5, 3)$. Maka translasi dari L ke L' adalah

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} -2 - (-5) \\ 2 - 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jadi,

$$T = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dan faktor skala dilatasinya adalah 2 . Maka **jawaban yang benar adalah C**.

Materi Matematika Lanjut

1. Matriks
2. Suku Banyak
3. Lingkaran
4. Vektor
5. Fungsi ekponen /Trigonometri
6. Transformasi
7. Limit

21. Garis l merupakan bayangan garis $3x + 2y = 6$ setelah dirotasikan sebesar 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat rotasi $(2, 0)$.

Manakah koordinat titik berikut yang terletak pada garis l ?

Pilih semua jawaban yang benar.

- ☐ $(-3, -2)$
- ☐ $(-2, -1)$
- ☐ $(1, 2)$
- ☐ $(2, 0)$
- ☐ $(5, 2)$

Konsep yang Diuji:

- Rotasi titik terhadap pusat tertentu.
- Menentukan persamaan bayangan garis hasil rotasi.
- Menguji apakah suatu titik terletak pada garis.
- Transformasi geometri pada bidang Cartesius.

Solusi

- Misalkan titik (X, Y) terletak pada garis bayangan l . Karena garis asal dirotasikan 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat $(2, 0)$, maka untuk mencari persamaan bayangannya kita dapat menggunakan **rotasi balik**, yaitu 90° **searah jarum jam**. Jika titik bayangan adalah (X, Y) , maka titik asalnya adalah

$$x = 2 + Y,$$

$$y = 2 - X.$$

- Titik asal harus memenuhi persamaan garis $3x + 2y = 6$. Substitusikan $x = 2 + Y$ dan $y = 2 - X$.

$$3(2 + Y) + 2(2 - X) = 6$$

$$6 + 3Y + 4 - 2X = 6$$

$$3Y - 2X + 4 = 0$$

$$2X - 3Y = 4.$$

- Jadi persamaan garis bayangan l adalah $2x - 3y = 4$.

- Periksa setiap pilihan.

- $(-1, 3 - 2)$: $2(-3) - 3(-2) = 0$, tidak memenuhi.
- $(-1, 2 - 1)$: $2(-2) - 3(-1) = -1$, tidak memenuhi.
- $(1, 2)$: $2(1) - 3(2) = -4$, tidak memenuhi.
- $(2, 0)$: $2(2) - 3(0) = 4$, memenuhi.
- $(5, 2)$: $2(5) - 3(2) = 4$, memenuhi.

- Jadi koordinat titik yang terletak pada garis l adalah $(2, 0)$ dan $(5, 2)$. Maka **jawaban yang benar adalah D dan E**.

22. Nilai dari:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x + 1}{5 + 3x - 9x^2} = \dots$$

A. $-\frac{7}{67}$

B. $-\frac{6}{67}$

C. $\frac{6}{76}$

D. $\frac{7}{67}$

E. $\frac{7}{76}$

Konsep yang Diuji:

- Menghitung limit fungsi rasional.
- Melakukan substitusi langsung jika penyebut tidak bernilai nol.
- Menyederhanakan hasil pecahan.

Solusi

Karena penyebut tidak bernilai nol saat $x = 3$, nilai limit dapat dihitung dengan substitusi langsung.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x + 1}{5 + 3x - 9x^2} &= \frac{3^3 - 3(3)^2 + 2(3) + 1}{5 + 3(3) - 9(3)^2} \\ &= \frac{27 - 27 + 6 + 1}{5 + 9 - 81} \\ &= \frac{7}{-67} \\ &= -\frac{7}{67}.\end{aligned}$$

Jadi, jawaban yang benar adalah **A**.

23. Roni, penjual nasi goreng, menjual dagangannya sebanyak P porsi dan memperoleh keuntungan (dalam jutaan rupiah) yang dinyatakan dengan fungsi

$$K(p) = \frac{9p^2 + 2p + 10}{3p^2 + 3p + 2}$$

Keuntungan yang akan diperoleh Roni apabila ia menjual nasi goreng dengan jumlah porsi sangat banyak adalah

- | | |
|-------------------|--------------------|
| A. Rp2.000.000,00 | D. Rp9.000.000,00 |
| B. Rp3.000.000,00 | E. Rp10.000.000,00 |
| C. Rp5.000.000,00 | |

Konsep yang Diuji:

- Menentukan limit fungsi rasional saat $x \rightarrow \infty$
- Membandingkan derajat pembilang dan penyebut.
- Menentukan limit menggunakan koefisien suku berpangkat tertinggi.
- Menginterpretasikan hasil limit dalam konteks kehidupan sehari-hari.

Solusi

Karena yang ditanyakan adalah keuntungan saat jumlah porsi sangat banyak, maka dicari

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{9p^2 + 2p + 10}{3p^2 + 3p + 2}$$

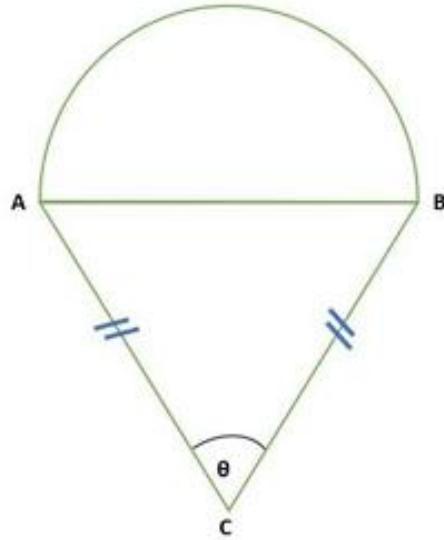
Pembilang dan penyebut memiliki derajat yang sama, sehingga limit ditentukan oleh perbandingan koefisien pangkat tertinggi.

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{9p^2 + 2p + 10}{3p^2 + 3p + 2} &= \frac{9}{3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Nilai fungsi dinyatakan dalam **jutaan rupiah**, sehingga keuntungan maksimum yang didekati adalah: 3 juta rupiah = Rp3.000.000,00.

Jadi, jawaban yang benar adalah **B**.

24. Sebuah setengah lingkaran dengan diameter AB terletak pada segitiga sama kaki ABC sehingga membentuk daerah menyerupai kerucut es krim seperti pada gambar berikut.



Konsep yang Diuji:

- Menentukan luas segitiga sama kaki berdasarkan sudut puncak.
- Menghitung luas setengah lingkaran.
- Menyusun perbandingan dua luas.
- Menentukan limit trigonometri dalam konteks geometri dengan menggunakan pengertian limit.

Jika luas segitiga ABC dinyatakan dengan X dan luas setengah lingkaran dinyatakan dengan Y , manakah pernyataan berikut yang benar mengenai nilai $\lim_{\theta \rightarrow a} \frac{X}{Y}$?

- ☐ Besar jari-jari mempengaruhi nilai limit.
- ☐ Besar sudut tidak mempengaruhi nilai limit.
- ☐ Nilai $\frac{X}{Y}$ selalu sama untuk berapa pun θ .
- ☐ $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{X}{Y} = \frac{2}{\pi}$
- ☐ Jika $\theta = \pi$, maka $\frac{X}{Y} = 0$

Solusi

Misalkan panjang diameter setengah lingkaran adalah $AB = d$. Pada segitiga sama kaki ABC , sudut puncaknya adalah θ .

Tinggi segitiga dari titik C ke AB adalah

$$h = \frac{d}{2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Maka luas segitiga adalah

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \cdot d \cdot h \\ &= \frac{1}{2} \cdot d \cdot \frac{d}{2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{d^2}{4 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Luas setengah lingkaran dengan diameter d adalah

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{2} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \\ &= \frac{\pi d^2}{8}. \end{aligned}$$

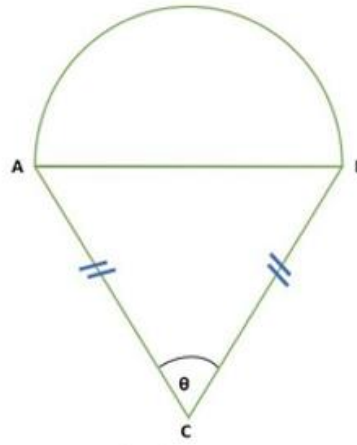
Sehingga

$$\begin{aligned} \frac{X}{Y} &= \frac{\frac{d^2}{4 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\frac{\pi d^2}{8}} \\ &= \frac{2}{\pi \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Dari bentuk tersebut, nilai $\frac{X}{Y}$ tidak dipengaruhi oleh besar diameter atau jari-jari, tetapi dipengaruhi oleh besar sudut θ . Jika $\theta \rightarrow \pi$, maka

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{X}{Y} &= \frac{2}{\pi \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dengan demikian, pernyataan yang benar adalah **E**.



25. Nilai $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \cos(6x - 18)}{\left(x - \frac{9}{x}\right) \sin(6x - 18)} = \dots$

A. $-\frac{3}{2}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. 0

D. $\frac{2}{3}$

E. $\frac{3}{2}$

Konsep yang Diuji:

- Menggunakan limit trigonometri.
- Menggunakan rumus $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$
- Menentukan limit fungsi trigonometri dengan substitusi variabel.

Solusi

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \cos(6x - 18)}{\left(x - \frac{9}{x}\right) \sin(6x - 18)} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \cos 6(x - 3)}{\left(\frac{x^2 - 9}{x}\right) \sin 6(x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 \sin^2 3(x - 3)}{\left(\frac{(x + 3)(x - 3)}{x}\right) \sin 6(x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x \sin^2 3(x - 3)}{(x + 3)(x - 3) \sin 6(x - 3)}\end{aligned}$$

Selanjutnya gunakan sifat limit

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{(x + 3)} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin 3(x - 3)}{(x - 3)} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin 3(x - 3)}{\sin 6(x - 3)} \\ &= \frac{2(3)}{(3 + 3)} \cdot 3 \cdot \frac{3}{6} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Jadi, jawaban yang benar adalah E.

Solusi

Misalkan $t = 6x - 18$. Sehingga $x = \frac{t+18}{6}$

Saat $x \rightarrow 3$, berlaku $t \rightarrow 0$.

Berikutnya $x - \frac{9}{\pi} = \frac{t+18}{6} - \frac{9}{\frac{t+18}{6}} = \frac{t+18}{6} - \frac{54}{t+18} \rightarrow 3 - \frac{9}{\pi} \neq 0$, maka faktor

tersebut dapat dianggap sebagai konstanta. Gunakan limit istimewa $1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2}$, $\sin t \sim t$. Sehingga

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \cos(6x - 18)}{\left(x - \frac{9}{\pi}\right) \sin(6x - 18)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2}{2}}{\left(3 - \frac{9}{\pi}\right) t} \\ &= \frac{1}{2 \left(3 - \frac{9}{\pi}\right)} \lim_{t \rightarrow 0} t \\ &= 0.\end{aligned}$$

Jadi, jawaban yang benar adalah **C**.